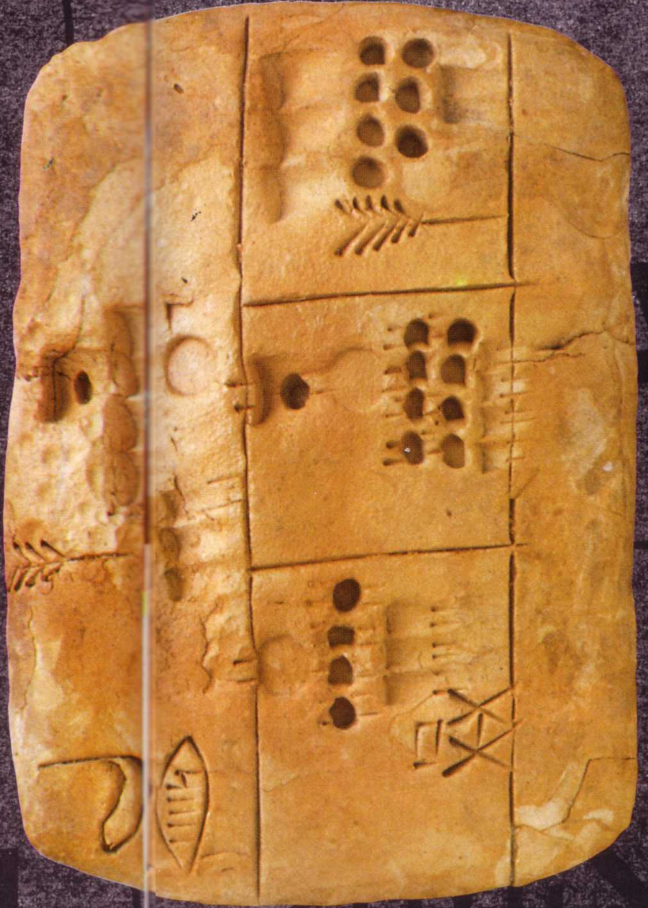
(Damerow, Peter, and Robert K. Englund. "Indrukken in Klei: Het begin van det getal," *Natuur & Techniek* 59 (1991) 696-707)

INDRUKKEN IN KLEI

HET BEGIN VAN HET GETAL



Peter Damerow
Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlijn

Robert K. Englund en Hans J. Nissen
Freie Universität Berlin

Zo'n 5000 jaar geleden ontstonden de eerste geschreven documenten. Mesopotamiërs bewerkten klompjes vochtige klei met een stompe en een scherpe griffel, om daarop ondermeer bezittingen, oogstopbrengsten en recepten vast te leggen. De teksten bevatten vrijwel allemaal veel aantalsaanduidingen en zijn daarom nog steeds belangrijke documenten, die ons kunnen leren hoe de mensheid met getallen leerde omgaan.

Doordat we er al jong mee leren werken is het omgaan met getallen ons zeer vertrouwd en vinden we rekenen heel gewoon. We kunnen ons dan ook nauwelijks voorstellen wat voor geestelijke krachttoer het betekende, om de aanduiding van een aantal los te koppelen van het getelde object zelf. Die stap is niet zo vanzelfsprekend, zoals onlangs is aangetoond door onderzoek bij natuurvolkeren die nog niet bleken te beschikken over abstracte getallen zoals wij die kennen. Archeologen hebben daar nooit rekening mee gehouden en gingen bij de interpretatie van de oudste ons bekende, geschreven documenten – afkomstig uit Mesopotamië en zo'n vijfduizend jaar oud – steeds uit van het bestaan van zo'n getalbegrip.

De oudste geschreven documenten van Voor-Azië zijn kleitabletten waarop in de nog vochtige klei tekens werden gegrift of gedrukt. Bijna al de 4500 tabletten en fragmenten die we nu kennen, werden gevonden tijdens opgravingen in Uruk, een eertijds grote, welvarende stad in het tegenwoordige woestijngebied van zuid-Irak. Sinds 1912 onderzochten Duitse archeologen deze stad. Hun werk werd slechts onderbroken door de beide Wereldoorlogen en is sinds de aanloop naar de Golfoorlog voorlopig aan zijn einde gekomen. Uruk is meer dan vijfduizend jaar – tot in de eerste eeuwen na Christus – continu bewoond geweest, al waren er ook toen turbulente perioden.

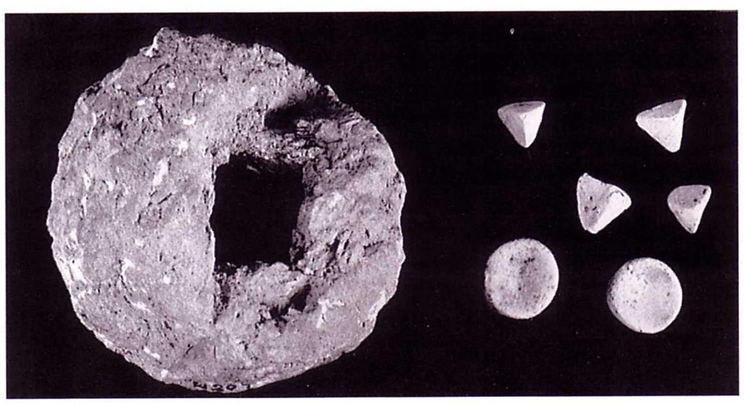
De meeste kleitabletten werden in het centrum gevonden, maar vondsten in andere delen van de stad tonen aan dat het gebruik van schrift niet beperkt was tot de binnenstad.

Lange tijd gingen archeologen er vanuit dat de mens al een abstract getalbegrip had voordat die het schrift beheerste. De ontcijfering van de kleitabletten uit Uruk geeft echter aanleiding om deze vooronderstelling in twijfel te trekken. In de tijd waaruit de oudste documenten dateren, werden getalsaanduidingen strikt *voorwerp-specifiek* gebruikt. Een groot aantal ervan is zelfs voor meer dan één uitleg vatbaar; dat wil zeggen dat de numerieke waarde die een aanduiding vertegenwoordigt, verandert naar gelang haar toepassing.

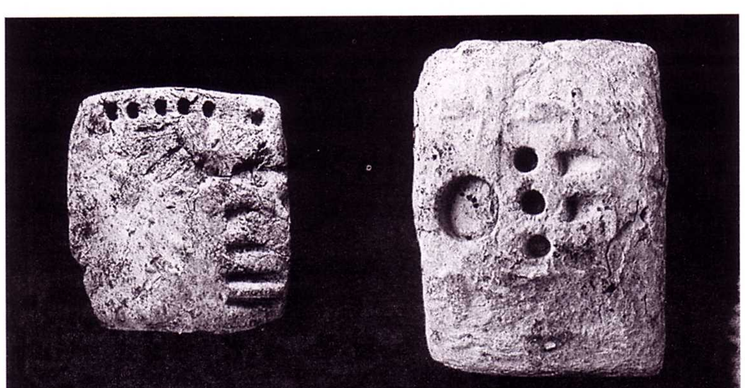
De Mesopotamiërs hadden drieduizend jaar voor Christus al grotendeels de stap gezet van de symbolische weergave van een hoeveelheid voorwerpen naar een puur abstracte aanduiding van het aantal. In zoverre belichten de getalsaanduidingen in de kleitabletten ook een belangrijk stadium in de ontwikkeling van de kennis en het begripsvermogen (de *cognitieve ontwikkeling*) van de mens.

Berlijnse onderzoekers werken aan de ontcijfering van deze documenten en de reconstructie van deze fase in de cognitieve ontwikkeling. De getalsaanduidingen staan daarbij sinds kort in het centrum van de belangstelling. De oude teksten bevatten zo'n 1200 tekens en varianten daarvan. Daarvan springen de ongeveer zestig getalsaanduidingen al direct in het oog vanwege hun schrijfwijze. Meestal werden ze niet – zoals de overige tekens – met een scherpe griffel in het oppervlak van kleitabletten gekrast, maar werden ze daar met een ronde griffel diep ingedrukt en dan gedeeltelijk met de spitse griffel van markeringen voorzien.

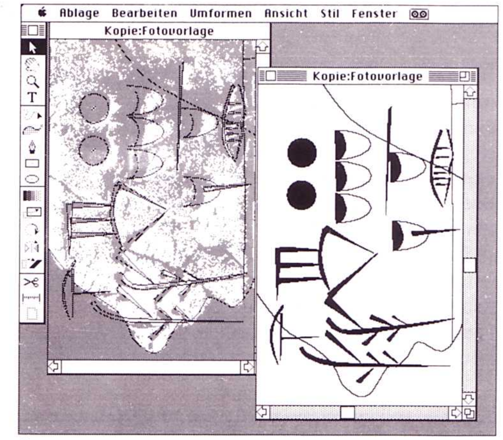
Aangezien de archaïsche teksten grotendeels administratieve documenten zijn, behoren getalsaanduidingen tot de belangrijkste schrifttekens daarin. Omdat deze teksten het karakter hebben van een boekhouding, vertegenwoordigen de getalsaanduidingen tevens een belangrijke informatiebron. Het ligt dan ook voor de hand dat archeologen bij de ontcijfering bijzondere aandacht besteden aan deze tekens.



1. Uit de periode vlak voor het schrift zijn intrede deed, stammen onvervalsbare 'documenten' zoals deze holle bal van klei. De bal was gevuld met een aantal telstenen en verzegeld met stempelindrukken. Uit de telstenen hebben zich later de getaltekens van het archaïsche schrift ontwikkeld.



2. Als onmiddellijke voorloper van het schrift komen kleitabletten met getalindrukken (links) ten tonele. Ze bevatten geen andere tekens en de indrukken zijn nog niet volgens vaste regels geordend. Iets later verschijnen tabletten met naast de getaltekens ook sporen van stempelindrukken. De ordening van de 'getallen' komt hier reeds overeen met de later gebruikelijke systemen.



3. Met behulp van een computer kunnen de Berlijnse onderzoekers de indrukken in een kleitablet 'overtrekken' en aldus herleiden tot eenduidige grafische tekens (rechter venster van deze schermafbeelding). Dat doen zij vanaf een foto van het tablet, die zij met een scanner inlezen. Ook bij het achterhalen van de betekenis speelt de computer een onmisbare rol.

Regels voor het gebruik van de tekens

Voor onze analyse gebruikten wij, de groep Berlijnse onderzoekers, een werkwijze die fundamenteel afwijkt van de tot nog toe gebruikelijke methoden. Men heeft tot nu toe steeds geprobeerd om uit de weinige teksten die complete berekeningen bevatten, zo rechtstreeks mogelijk de betekenis van getalsaanduidingen af te leiden. De op die manier ontdekte waarden gebruikte men vervolgens voor de interpretatie van teksten waaruit de rekenkundige betekenis niet direct viel af te leiden. In plaats van zo rechtstreeks naar deze numerieke waarde te zoeken, probeerden wij eerst zoveel mogelijk te weten te komen over de wetmatigheden die ten grondslag lagen aan het gebruik van de tekens, zonder ons om de betekenis te bekommeren.

Daarbij bleken de honderden, uit elke denkbare context geraakte en daardoor schijnbaar betekenisloze scherven met getalsaanduidingen, plotseling zeer waardevol. Onze methode om uit die fragmenten regels te reconstrueren voor het gebruik van de getalsaanduidingen, is te vergelijken met een computerspelletje. Iedere regel die we ontdekten of vermoedden werd met behulp van de computer direct op de hele tekst getoetst. Hoeveel voorbeelden waren er te vinden, die de regel onderschreven? Hoeveel uitzonderingen waren er en hoeveel voorbeelden die tegen de regel indruisten?

De meerduidigheid van de tekens die in het verleden zo dikwijls tot irritatie had geleid, stoorde daarbij nauwelijks, omdat we alleen de regels voor het tekengebruik en niet de betekenis van de tekens zelf onderzochten.

Voor het weergeven van hoeveelheden met archaïsche getalsaanduidingen blijken drie zeer algemene regels kenmerkend. We noemen die respectievelijk de correspondentie-, de vervangings- en de volgorderegel, en zullen ze hier in het kort bespreken voordat we ons gaan bezighouden met de specifiekere regels.

Volgens de *correspondentie*-regel worden hoeveelheden voorgesteld door een herhaling van bepaalde tekens. Daarbij wordt het teken voor de tel- of meeteenheid net zo dikwijls herhaald, als de betreffende eenheid in de te tellen of te meten hoeveelheid is vervat. Dat gebeurt echter alleen tot een bepaalde, van de context afhankelijke, limiet. Overschrijdt de weer te geven hoeveelheid deze limiet, dan vervangt een teken van hogere waarde steeds een vast aantal herhalingen van het teken met lagere waarde: de *vervangings*-regel. Daarbij wordt het teken met de hogere waarde zelf als eenheid behandeld en overeenkomstig de correspondentieregel indien nodig herhaald.

De *volgorde*-regel tenslotte, bepaalt dat de tekens in een getalsaanduiding steeds in de

De inhoud van de teksten

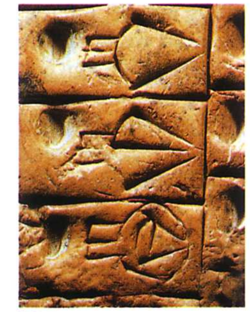
INTERMEZZO I

Bijna alle notities uit Uruk beginnen met een variërend aantal indrukken, die gemakkelijk als getalsaanduidingen waren te identificeren. Ook latere teksten met aantekeningen over economische feiten beginnen zo en daarmee was bewezen dat het merendeel van de oudste tabletten economische documenten betrof.

Sommige teksten vallen buiten dit bestek, doordat iedere notitie met een merkteken begint. Maar ook daarvoor bestaan equivalenten in latere teksten: zogenaamde *lexicale lijsten* sommen achter elkaar inhoudelijk of formeel bij elkaar behorende begrippen op, soms ingeleid door een '1'. Deze lijsten vormen optellingen van voorwerpen van hout (namen van bomen) of metaal, dieren (onderscheiden naar geslacht) of namen van steden. Belangrijk voor ons begrip van de toenmalige maatschappij is een lijst met de titels en functie-omschrijvingen van het toenmalige bestuursapparaat in hiërarchische volgorde.

Verreweg de meeste tabletten bevatten echter gegevens die in het dagelijks leven noodzakelijk zijn voor een overzicht van het economische verkeer. Door middel van steekwoorden worden goederen en hun hoeveelheden aangeduid, en wordt vermeld wie betrokken was bij een transactie of deze controleerde. De elementen die voor een lopende tekst vereist zouden zijn, ontbreken. Daaruit blijkt dat het schrift aanvankelijk ongeschikt was om op andere dan strikt economische terreinen te gebruiken.

Verder onderzoek maakt aannemelijk dat de toenmalige economische systemen uitgebreide en steeds ingewikkelder controlemogelijkheden vereisten. Zowel de inhoud als het gebruik van het schrift laten zien dat dit naar alle waarschijnlijkheid ontstond om problemen bij de controle van het economische verkeer het hoofd te bieden.



I-1

I-1. Lexicale lijsten sommen allerlei samenhangende begrippen op. Dit is een fragment uit zo'n lijst, waarin een lange reeks vaten of kannen met een bepaalde inhoud (vermoedelijk diverse soorten bier) wordt opgevoerd. De begrippen worden hier alle voorafgegaan door het teken voor '1', een indruk met een stompe griffel.

4 en 5. De toepassing van diverse getalsystemen voor verschillende zaken is karakteristiek voor de notatie van aantallen op de archaïsche kleitabletten. Op afbeelding 4 staan (in het vak rechtsboven) in een 60-tallig stelsel 1223 (2×600, 2×10 en 3×1) eenheden van een onbekend geiteprodukt genoteerd. In het vak daaronder zijn in een 120-tallig stelsel 18 120 (2×7200, 3×1200 en 1×120) eenheden van een melkprodukt geboekt. Het andere tekstfragment (5) is onderdeel van een tablet met gegevens over veldarealen en graanoogsten. Op de voorzijde (5a) is in het zogenaamde GAN$_2$-systeem een oppervlak genoteerd dat ongeveer 260 hectare omvat. Op deze zijde stonden vermoedelijk meer van zulke areaalopgaven, samen met oogstopbrengsten. Op de achterzijde (5b) is de som van deze opbrengsten grotendeels bewaard gebleven. Zij staat in het ŠE-systeem, dat speciaal voor oogsten in gebruik was. De totale oogst omvat 180 161 (3×54 000, 2×9000, 5×30, 2×5 en 1×1) eenheden van een inhoudsmaat van ongeveer vier liter (dus ruim 720 000 l). Het beheer van dergelijke hoeveelheden, die de jaarproduktie van een enkel dorp verre overtreffen, speelde vermoedelijk een beslissende rol in de vroege ontwikkeling van het rekenkundige denken.

4

5a

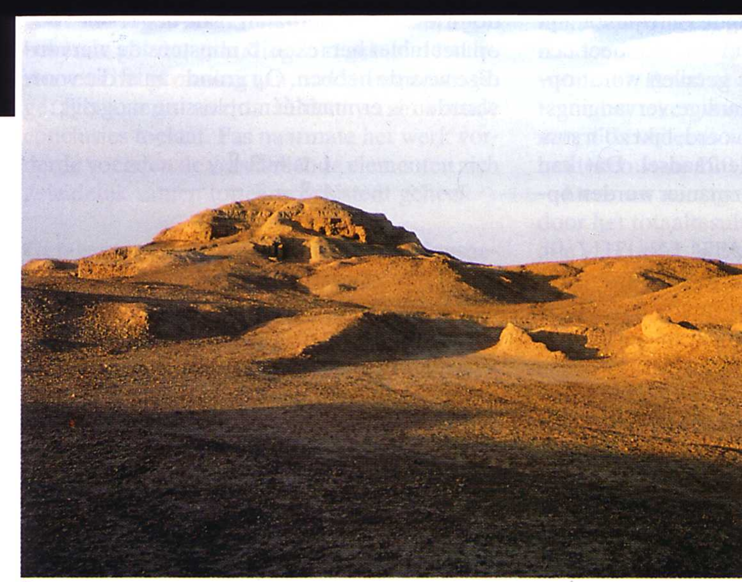
b

volgorde van hun rangorde (waarde) worden opgeschreven, te beginnen met het teken met de hoogste waarde.

Deze regels zijn al lang algemeen bekend en zo voor de hand liggend, dat een nader onderzoek ervan niet de moeite waard leek. Wanneer men de tekens als symbolen voor getallen beschouwt, werken de regels als kader van een systeem voor de getalsaanduiding immers heel bevredigend. Wanneer bijvoorbeeld een bepaald teken de 1 en een ander de 6 voorstelde, kon het eerste teken noodzakelijkerwijs niet meer dan vijf keer voorkomen.

Maar er zijn ook andere oplossingen denkbaar. Het eerste teken zou bijvoorbeeld een kleine maatbeker voor kunnen stellen en het tweede een grotere, met het zesvoudige volume. Ook dan is het verklaarbaar waarom het kleinere teken slechts vijf keer voorkwam.

Wij hielden ons aanvankelijk niet met zulke problemen bezig en gingen in plaats daarvan voor verschillende toepassingsgebieden na hoe vaak de afzonderlijke tekens maximaal herhaald werden. Daaruit leidden wij de respectieve waarde van het meerduidige teken af en ontdekten dat die afhankelijk was van de context.



6

6. Een blik over het opgravingsgebied in Uruk, waar het oudst bekende schrift werd gevonden. Uit die stad stammen bijna alle archaïsche kleitabletten. Uruk lag dicht bij de rivier de Eufraat in het huidige Zuid-Irak en werd van vijfduizend jaar voor onze jaartelling tot kort daarna bewoond.

Optellingen

Het is betrekkelijk eenvoudig om de 'waarde' van een teken vast te stellen, als we te maken hebben met een optelling waarbij dit teken een bepaald aantal tekens met lagere waarde vervangt. Tekst W 20676,2 (afb. 7) bevat bijvoorbeeld op de achterzijde de som van de beide boekingen van de voorzijde. De berekening luidt als volgt:

1 ● 7 D + 5 D = 2 ● 2 D

Daaruit valt af te leiden dat tien D's door één ● worden vervangen ofwel: 1 ● = 10 D.

Het is echter niet gemakkelijk vast te stellen in hoeverre deze resultaten algemeen geldig zijn. Want de oude getalsaanduidingen werden in principe zo gebruikt dat ze op verschillende momenten een verschillende rekenkundige waarde hebben. Zo bevat tekst W 15897,c21 (afb. 8) de optelling

3 D + 3 D + 3 D + 3 D = 2 ●

Volgens het voorbeeld hierboven zou als uitkomst 1 ● 2 D te verwachten zijn. De som 2 ● betekent dat het teken ● in deze context niet de tienvoudige maar slechts de zesvoudige waarde van het teken D vertegenwoordigt.

Maar het is niet alleen de met de context variërende rekenkundige betekenis van de getalsaanduidingen die ervoor zorgt dat de optellingen niet altijd zo eenvoudig te ontcijferen zijn als in de voorbeelden hierboven. Wanneer een groter aantal ingewikkelde getallen wordt opgeteld en evenredig veelvoudige vervangingsbewerkingen worden uitgevoerd, lijkt zo'n som op een ingewikkeld getallenraadsel. Dat kan niet zelden op meer dan één manier worden opgelost.

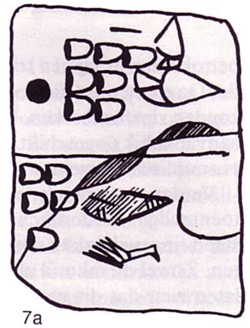
Uit de optelling in tekst ATU 1 Nr. 311 (afb. 9) is bijvoorbeeld alleen de volgende vergelijking af te leiden:

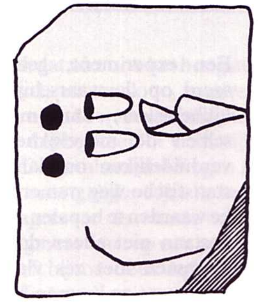
1 ⧖ + 1 ▽ + 4 ⊫ = 1 D

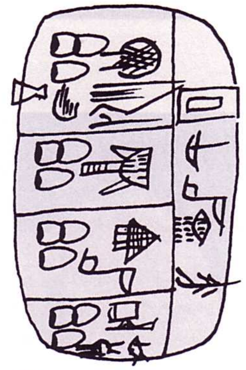
Deze vergelijking bevat vier onbekenden en is daardoor op talrijke manieren op te lossen. In dit geval is met enig geluk echter toch nog de verhouding tussen de tekens te achterhalen. Zo is uit de wijze van noteren de rangorde van de tekens af te leiden. Verder weten we dat de getalsaanduidingen met hogere waarde in de regel hele veelvouden vertegenwoordigen van tekens met lagere waarde. Tenslotte moet wegens de drievoudige herhaling van het teken ⊫ op het tablet het teken ▽ minstens de viervoudige waarde hebben. Op grond van al die voorwaarden is er maar één oplossing mogelijk:

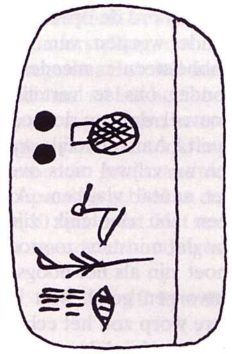
1 D = 2 ⧖
1 ⧖ = 2 ▽
1 ▽ = 4 ⊫

In het algemeen zijn de mogelijkheden om de waarde van de getalsaanduidingen in optellingen te bepalen echter beperkt. Dat is alleen al om de eenvoudige reden dat slechts op enkele van de archaïsche teksten optellingen voorkomen. Van die paar optellingen is bovendien nog hooguit een fractie gaaf genoeg om alle opgetelde getallen te ontcijferen. Het is echter ook mogelijk om met statistische methoden conclusies te trekken omtrent de waarde van de tekens (zie Intermezzo II). Op die manier kan men systematisch controleren in hoeverre de resultaten die een afzonderlijke sleuteltekst heeft opgeleverd, algemeen bruikbaar zijn. Het was vooral zo ingewikkeld om uit de meer dan 6500 bekende getalsaanduidingen regels te destilleren voor het gebruik ervan, omdat een eenmalige gebeurtenis slechts zelden verstrekkende conclusies toelaat. Pas naarmate het werk vorderde voegden de verschillende elementen zich geleidelijk samen tot een consistent geheel.

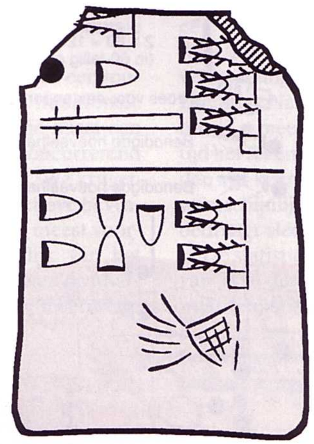

7a

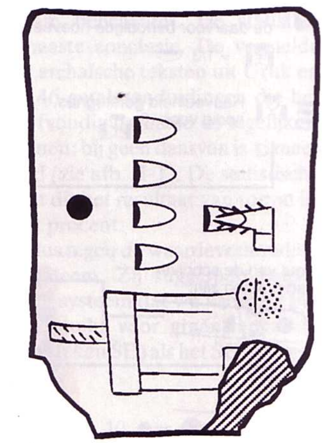

b


8a


b

7 en 8. Rekenkundige dubbelzinnigheid is een van de merkwaardigste eigenschappen van de getaltekens in de oudste geschreven documenten. Zoals de afgebeelde teksten bewijzen, veranderen deze tekens met het bereik waarop hun rekenkundige betekenis wordt toegepast. Bij beide teksten is op de achterzijde de som genoteerd van wat op de voorzijde staat geboekt. Op het bovenste tablet, waarop bierkroezen vermeld staan, worden 17 en 5 eenheden opgeteld. Het resultaat is dus 22 eenheden. De rechte indruk (stip) heeft hier de tienvoudige betekenis van het teken voor één eenheid. In de onderste tekst worden viermaal 3 eenheden van een onbekend graanprodukt opgeteld. De som (12 eenheden) wordt weergegeven met twee stippen, die hier dus 6 eenheden vertegenwoordigen.


9a


9b

9. Vaak kunnen uit berekeningen die diverse algebraïsche oplossingen kennen, de grootteverhoudingen tussen de tekens worden opgehelderd met behulp van vrij voor de hand liggende aannamen. Dat mag blijken uit dit tablet, waarvan de tekens tot het archaïsche EN-systeem konden worden herleid. De tekst ATU 1 Nr. 311 bevat een optelling die als vergelijking met vier onbekenden vele oplossingen kent. Uit de volgorde van de tekens kunnen we echter de grootte van de getallen opmaken. Verder kunnen we er redelijkerwijs van uitgaan dat de hogere tekens steeds hele veelvouden van de lagere tekens zijn. Tenslotte geeft het grootste aantal herhalingen van een teken aan hoe groot de waarde van het eerstvolgende hogere teken ten minste moet zijn. Met deze aannamen geven de tekens hun onderlinge samenhang langs algebraïsche weg eenduidig prijs.

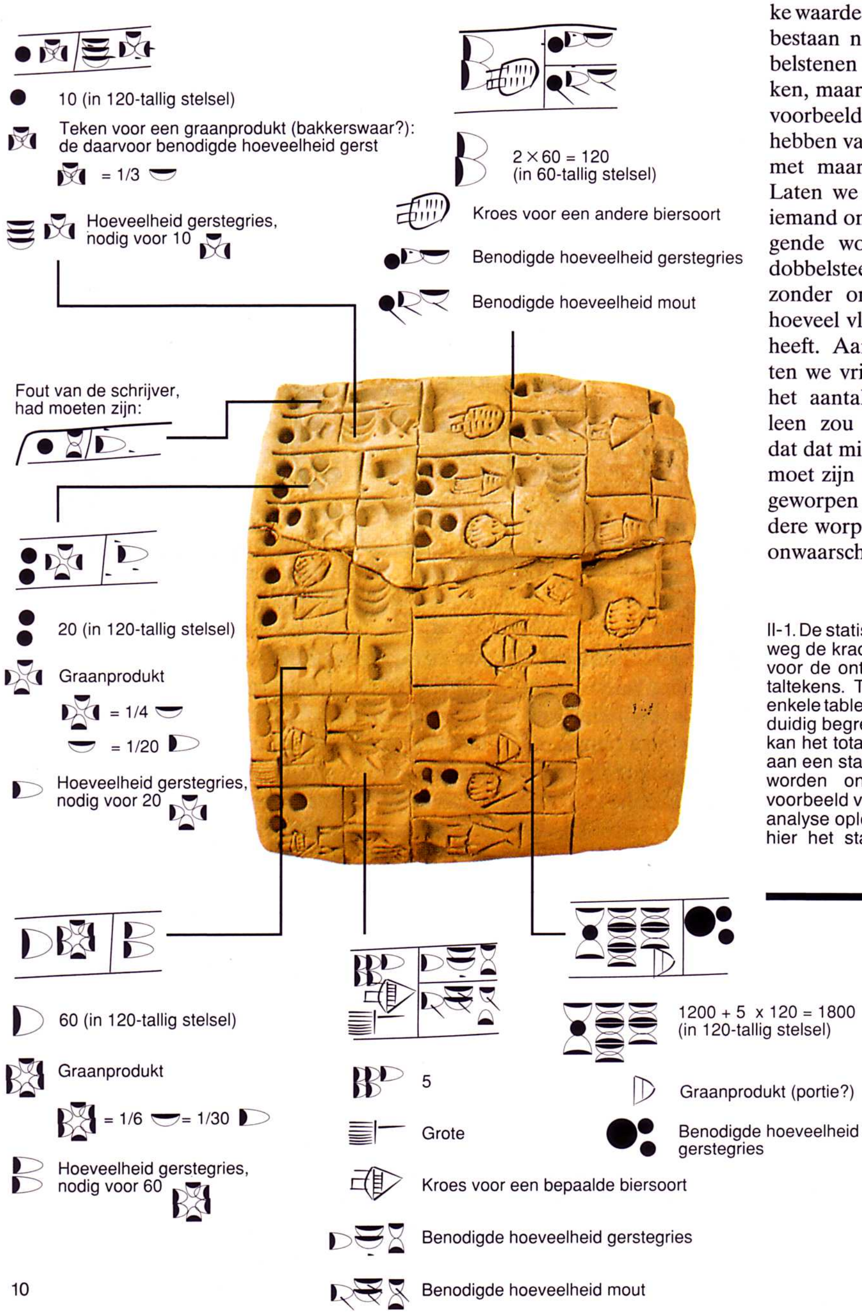
Getalsystemen met specifieke toepassingsgebieden

De gevonden regels voor het gebruik van de tekens kwamen in grote lijnen overeen met de gangbare betekenis die aan getalwaarden wordt toegeschreven. Daarnaast vonden we echter ook regels die afweken van de gebruikelijke interpretatie van de tekens als getalsaanduidingen van een uniform systeem.

Zo zijn er drie tekens waaraan men de getalwaarde 60, 120 en 600 toeschrijft. We ontdekten nu de eigenaardige regel dat de tekens voor 120 en 600 nooit samen in een tekstnotatie voorkomen. Wanneer het teken voor 120 voorkomt, komt het soms meer dan vijf maal voor, zonder dat het wordt vervangen door het teken voor 600. Bevat een getalsaanduiding daarentegen het teken voor 600, dan wordt het teken voor 60 eveneens vaker herhaald en niet door het teken voor 120 vervangen.

Deze en soortgelijke verrassingen konden door het totaalresultaat van ons gepuzzel worden verklaard. We ontdekten dat de meer dan 6500 getalsaanduidingen bijna volledig onder te brengen waren in een aantal verschillende getalsystemen, waarin dezelfde tekens voor een deel heel verschillende numerieke waarden hebben. Zo komen de tekens voor 120 en 600 eenvoudig nooit samen voor omdat ze tot verschillende getalsystemen behoren. Een nadere analyse toonde aan dat de verschillende systemen, enkele uitzonderingen daargelaten, zeer strikt van elkaar afgegrensde toepassingsgebieden kennen.

10. Dit circa 5000 jaar oude tablet bevat in proto-spijkerschrift recepten voor diverse graanprodukten, waaronder enkele soorten bier. Zoals gebruikelijk in die tijd worden voor verschillende produkten verschillende getalsystemen gebruikt. Zo was voor telbare graanprodukten een 120-tallig stelsel in gebruik en voor bier een 60-tallig stelsel. Daarnaast komen in het tablet nog drie varianten voor van een systeem gebaseerd op inhoudsmaten.



10

Statistiek

INTERMEZZO II

Een experiment, gebaseerd op de waarschijnlijkheidsleer, kan misschien de mogelijkheid verduidelijken om langs statistische weg numerieke waarden te bepalen. Er bestaan niet alleen dobbelstenen met zes vlakken, maar ze kunnen bijvoorbeeld ook de vorm hebben van een tetraëder met maar vier vlakken. Laten we aannemen dat iemand ons de opeenvolgende worpen van zijn dobbelsteen meedeelt, zonder ons te vertellen hoeveel vlakken de steen heeft. Aanvankelijk weten we vrijwel niets over het aantal vlakken. Alleen zou duidelijk zijn, dat dat minstens zo groot moet zijn als het hoogste geworpen getal. Met iedere worp zou het echter onwaarschijnlijker worden dat niet ook het hoogste getal een keer geworpen werd, en tenslotte zouden we met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid weten hoeveel vlakken de dobbelsteen in werkelijkheid heeft.

De getalsaanduidingen in archaïsche teksten zijn op soortgelijke wijze te beschouwen als informatiedragers van de waarde van de gebruikte tekens. Ieder fragment waarop een bepaald teken wordt herhaald, geeft bijvoorbeeld opheldering over het feit hoe dikwijls dat teken in een bepaalde context minimaal kan worden herhaald. Met ieder fragment neemt tegelijkertijd de waarschijnlijkheid toe, dat het maximale aantal ook werkelijk een keer voorkomt.

Deze overweging levert bijvoorbeeld een eenvoudig statistisch bewijs voor het feit dat de traditionele veronderstelling, dat er in Mesopotamië naast een sexagesimaal stelsel aanvankelijk een concurrerend decimaal stelsel heeft bestaan, onjuist is. We krijgen op die manier een betrouwbare en objectieve bevestiging van de ontdekking dat een van de meest voorkomende getalsaanduidingen afhankelijk van het toepassingsgebied nu eens de waarde 6, dan de waarde 10 aanneemt. Het sexagesimale systeem berust op de waardeverhoudingen:

10 D = ● en 6 ● = D

Voor het veronderstelde decimale systeem zouden daarentegen de volgende waardeverhoudingen moeten gelden:

10 D = ● en 10 ● = ⬤

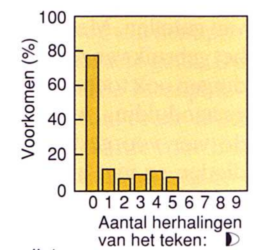
Wordt in een getalsaanduiding het teken ● meer dan vijfmaal herhaald, zonder dat het door het eerstvolgende teken met hogere waarde wordt vervangen, dan kan deze getalsaanduiding niet tot het sexagesimale systeem behoren.

Dat betekent echter niet dat die daardoor direct een decimaal systeem belichaamt. De statistiek weerlegt deze overhaaste conclusie. De vermelde verzameling van alle archaïsche teksten uit Uruk en Djemdet Nasr geeft 46 getalsaanduidingen die het teken ● meer dan vijfvoudig herhaald èn tegelijkertijd het teken D vertonen; bij geen daarvan is D meer dan vijf keer herhaald (zie afb. II-1). De statistische waarschijnlijkheid dat dit het resultaat van toeval is, bedraagt slechts 0,02 procent.

De statistiek pleit dus tegen de waardeverhouding van een decimaal systeem. Zij suggereert eerder waarderelaties van een systeem dat we vanwege het feit dat het wordt gebruikt voor graantransacties (weergegeven door het teken ŠE) als het ŠE-systeem hebben aangeduid:

6 D = ● en 10 ● = ⬤

II-1. De statistiek levert verreweg de krachtigste methode voor de ontcijfering van getaltekens. Terwijl er slechts enkele tabletten zijn met eenduidig begrepen optellingen, kan het totale tekstmateriaal aan een statistische analyse worden onderworpen. Als voorbeeld van wat dergelijke analyse opleveren, tonen we hier het statistische bewijs dat de waarde van het teken ● afhankelijk is van waarop het van toepassing is. In het 60-tallige systeem gelden de relaties 1 ● = 10 D en 1 D = 6 ●. In dit systeem kan het teken ● dus hooguit vijfmaal worden herhaald. Toch bestaat er een hele reeks tabletten waarop het teken meer dan vijfmaal in een groep voorkomt. Blijkens een statistische analyse, waarvan dit staafdiagram de resultaten toont, komt in al die gevallen het opvolgende lagere teken D, dat in het sexagesimale systeem tot negenmaal herhaald wordt, nooit meer dan vijfmaal voor. De kans dat dit op toeval berust is kleiner dan 0,0002. In dit zogenaamde ŠE-systeem, dat hoofdzakelijk voor graan in gebruik was, geldt dus 1 ● = 6 D (en 1 ● = 10 ●). Dat in teksten met een meer dan vijfvoudige herhaling van het teken ● het teken D vrij vaak ontbreekt, zien we als een trend om bij voorkeur ronde getallen te gebruiken.



II-1

Het ontbreken van een abstract getalbegrip

Na het bovenstaande rijst natuurlijk de vraag in welke zin men deze rekenkundige notaties eigenlijk kan beschouwen als aanduidingen van ‘getallen’. Ze hebben immers gecompliceerde en gedeeltelijk aan een specifieke inhoud gebonden regels voor het gebruik, kennen allerlei nevenbetekenissen en hun functie als rekeneenheid of als symbool voor een concreet object is niet altijd duidelijk begrensd. Welke ontwikkelingsfase vertegenwoordigen zij in een cultuur die duizend jaar later als eerste een hoog ontwikkelde wiskunde voortbracht?

Onze analyse van de archaïsche getalsaanduidingen en de regels voor het gebruik ervan weerlegt de opvatting dat de tekens voor abstracte getallen stonden. Weliswaar werden vaak dezelfde tekens gebruikt, maar als symbool van een ander getalsysteem hebben zij steeds een andere rekenkundige betekenis. Is er een theoretisch alternatief voor een interpretatie van de tekens als getalsaanduidingen? De Gestaltpsycholoog Max Wertheimer heeft al in 1912 zeer precies het psychologische karakter beschreven van rekenkundige prestaties vóór de ontwikkeling van een abstract getalbegrip. Aan de hand van onderzoeksverslagen over natuurvolkeren postuleerde hij psychologische structuren die hij *getalsanaloga* noemde. Ze blijven weliswaar gebonden aan een bepaalde concrete inhoud en zijn in zoverre minder abstract dan onze getallen, maar dienen wel voor overeenkomstige doeleinden.

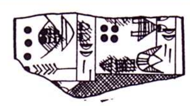
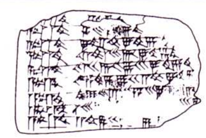
Er is inmiddels zeer veel onderzoek dat Wertheimers veronderstellingen bevestigt. Volgens dit onderzoek kennen veel ongeletterde culturen een groot aantal contextgebonden, protorekenkundige technieken, die noch een abstract getalbegrip veronderstellen, noch dit noodzakelijkerwijs tot gevolg hebben.

De door ons geanalyseerde archaïsche rekensystemen kunnen zeer goed worden vergeleken met zulke proto-rekenkundige technieken. Zo duiden de tekens geen getallen aan maar eenheden. De vier werd dus niet voorgesteld door een teken zoals onze '4', maar juist natuurkundig door een viervoudige herhaling van het teken voor de betreffende eenheid.

Dat betekent dat er geen formeel verschil bestond tussen de weergave van objecten en die van getallen. Men kon daardoor de regels voor het gebruik van de systemen voor getalsaanduidingen ook toepassen op de proto-rekenkundige aanduiding, waarin de vier herhaalde tekens de vier voorgestelde objecten vertegenwoordigden en niet het getal vier.

In de schriftloze culturen ontbreken niet alleen bepaalde vormen van abstract denken, maar ook de problemen en de rekenkundige technieken waarbij die zich zouden kunnen manifesteren. In de culturen waarin daarentegen een vorm van schrift werd gebruikt, trof men beide tot nog toe altijd tegelijkertijd aan. De vraag of tussen beide stadia een culturele ontwikkeling plaatsvond of slechts de *epigenetische,* dat wil zeggen de biologisch vastgelegde ontplooiing van een universele structuur van het menselijk denken, bleef onderwerp van tegenstrijdige speculaties.

De systemen voor getalsaanduidingen in de archaïsche teksten leveren nu de ontbrekende schakel: daarmee is bewezen dat de ontwikkeling van de grondbeginselen van rekenkundig denken cultureel bepaald is.

VOORBEELD	FASEN IN DE ONTWIKKELING VAN HET GETALBEGRIP	TIJD EN CULTUUR
	**Pre-operationele fase** Eerste plaatsing van gelijksoortige, relatief abstracte symbolen bij objecten, echter zonder systematische structuur.	Circa 40 000 tot 10 000 v. Chr. Laat-Paleolithicum
	**Proto-rekenkundige fase** Vastleggen van hoeveelheden met behulp van een eenduidig verband tussen objecten en symbolen. Overlevering van symboolsystemen. Hogere eenheden ontstaan door bundeling.	Na circa 10 000 v. Chr. Schriftloze culturen met vaste woonplaatsen
	**Archaïsche rekenkunde** Ontwikkelde rekenkundige technieken, maar zonder dat er sprake was van contextonafhankelijke 'getalaanduidingen'.	Circa 3200 v. Chr. Na de ontwikkeling van het schrift
	**Primaire rekenkunde** Universele getalafbeeldingen en expliciete rekenkunde, maar geen getalbegrip onafhankelijk van de afbeelding van de getallen. Er is geen begripsvorming die wijst op het gebruik van getallen als denkbeeldige objecten.	Na circa 3000 v. Chr. Vroege hoogontwikkelde culturen
EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV	**Abstract getalbegrip** Begrippen die het bestaan van getallen als denkbeeldige objecten verraden. Definiëring van getallen en bewijs van getaleigenschappen.	Na circa 500 v. Chr. Oude Grieken

11

11. Het abstracte getalbegrip is het resultaat van een lang ontwikkelingsproces, waarin de uitvinding van het schrift een belangrijke gebeurtenis was. Uitgangspunt van de ontwikkeling was de stuk-voor-stuktoekenning van symbolen aan objecten. Gestandaardiseerde 'telmiddelen' maakten die toekenning tot een gemeenschappelijk gebruik. Met de uitvinding van het schrift konden met 'getaltekens' aantallen gemakkelijk worden genoteerd, waarbij de tekens aanvankelijk nog sterk met de getelde objecten bleven verbonden. Geleidelijk werden getallen steeds zelfstandiger, abstracte begrippen. Uiteindelijk leidde de schriftelijke definitie van getallen en hun eigenschappen tot een tweedeling tussen de getalafbeeldingen en het getalbegrip.

Wanneer we ervan uitgaan dat daardoor met zekerheid een bepaalde fase in de ontwikkeling is te dateren, kunnen we proberen de bewaard gebleven bewijzen van het oude rekenkundige denken opnieuw te interpreteren. Dan ontstaat in grote lijnen het volgende totaalbeeld van een ontwikkeling die uitmondde in het abstracte getalbegrip (afb. 11). De eerste archeologische bewijzen die duiden op een systeem van relaties tussen voorwerpen en getalsymbolen in de meest algemene betekenis, vinden we al in het Laat Paleolithicum (ongeveer 40 000 tot 10 000 jaar v. Chr.). De gebruikte getalsymbolen zijn echter nog nauwelijks systematisch gestructureerd, wat voor een operationeel gebruik van de symbolen noodzakelijk is.

Op deze pre-operationele fase in de ontwikkeling van het getalbegrip volgt een proto-rekenkundige fase, waarin voor het eerst regels betreffende de symbolische weergave van hoeveelheden worden opgesteld. Parallel daaraan ontstonden op cognitief gebied getalsanaloga.

Vermoedelijk vormde de zogenaamde agrarische revolutie — de overgang naar systematische landbouw en veehouderij — de basis van deze verdere ontwikkeling. Daardoor werd het immers noodzakelijk de voorraden op peil te houden en de arbeidsverdeling te organiseren. In het Nabije Oosten valt de periode waarvoor men het gebruik van getalssymbolen heeft kunnen aantonen, inderdaad ongeveer samen met de periode waarin de nomadische levenswijze werd verruild voor een vaste woonplaats, en landbouw en veeteelt zich sterk uitbreidden.

De analyse van de getalssystemen uit de oude teksten van Mesopotamië verschaft ons een momentopname van de overgang van deze proto-rekenkunde naar de rekenkunde in engere zin. In korte tijd gaan de eigenaardige kenmerken van het archaïsche getalssysteem verloren en niet veel later dan drieduizend jaar voor Christus ontwikkelt zich de context-onafhankelijke, 'primaire' rekenkunde. Evenals in andere antieke, hoogstaande culturen wordt deze ontwikkeling gedragen door de bestuursambtenaren van de staatsbureaucratie en door de schrijversscholen waarin zij werden opgeleid.

Het is echter nog een lange weg van deze primaire rekenkunde naar het abstracte getal. De Babylonische wiskunde, die uit de Mesopotamische traditie voortkwam en ongeveer 1500 jaar na de uitvinding van het schrift voor het eerst tot bloei kwam, kende definities noch bewijzen; er bestond zelfs geen woord dat vergelijkbaar was met ons woord 'getal'. Het lijkt erop dat de eerste uitspraken over objecten die slechts in de menselijke geest bestaan — en daarmee de ontwikkeling van het getalbegrip — voorbehouden zijn gebleven aan de oude Grieken.

Dit artikel verscheen eerder in het Duitse maandblad *Spektrum der Wissenschaft.* Het werd voor ons vertaald door mevrouw drs C. Sykora uit Wageningen.

Bronvermelding illustraties

De afbeeldingen bij dit artikel zijn afkomstig van mevrouw M. Nissen (pag. 696/697, 1 en 2), van *Spektrum der Wissenschaft* (4 en 5), van mevrouw K. Englund (6) en van de auteurs.