Cuneiform Digital Library Preprints

<https://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/articles/cdlp>

Hosted by the Cuneiform Digital Library Initiative (<https://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de>)

This document is published under the CC BY 4.0 License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Number 25.0

Title: Geometrische Konstanten und griechische Mathematiktheoreme auf altbabylonischen Keilschrifttafeln - Eine Darlegung anhand von 7 Beispielen

Author: Jens Kleb (Erfurt, Germany)

Posted to web: 16 December 2022

Geometrische Konstanten und griechische Mathematiktheoreme auf altbabylonischen Keilschrifttafeln - Eine Darlegung anhand von 7 Beispielen

Jens Kleb 2022 (ORCID ID)

Abstrakt:

Anhand verschiedener altbabylonischer Keilschrifttafeln und deren Aufgaben, wird hier nicht nur die ohnehin bereits bekannte Nutzung des Satz des Pythagoras, 1300 Jahre vor der Lebenszeit des Namensgeber, dargelegt. Es kann zusätzlich gezeigt werden, dass es bereits zu dieser Zeit eine Verknüpfung der Dreiecks- und Rechteck-Geometrien mit dem sie umschreibenden Umfangskreis gab. Ebenfalls wird aufgezeigt, dass der Begriff des „Abstiegs“ in seiner mathematischen Bedeutung identisch mit dem Pfeilmaß, also dem größten Abstand der jeweiligen Sehne zum Bogenabschnitt des Kreises ist und die Verbindung zwischen eingeschriebenem Rechteck und seinem Umkreis darstellt. Bekannt ist, dass in altbabylonischer Zeit gern und oft sogenannte Konstanten oder Arbeitszahlen, also Verhältniswerte in den Rechnungen eingesetzt wurden um Rechenoperationen zu vereinfachen. In dieser Ausarbeitung wird ergänzend vorgestellt dass, für die Berechnung von fehlenden Rechteckseiten ein auf eine Basislänge von 1 „normalisiertes“ Rechteck genutzte wurde, das dann mit den Reallängen multipliziert werden musste, um das Ergebnis zu erhalten. Die bekannten Konstanten oder Arbeitszahlen wurden also auch in rein geometrischen Zusammenhängen genutzt, um die Rechnungen zu vereinfachen.

Geometric constants and Greek mathematical theorems on old Babylonian cuneiform tablets - An explanation based on 7 examples

Abstract:

Based on various old Babylonian cuneiform tablets and their tasks, not only the already known use of the Pythagorean Theorem, 1300 years before the lifetime of the namesake, is presented here. It can also be shown that the triangle and rectangle geometries were already linked with their circumscribed circle at this time. It is also shown that the term "descent" in its mathematical meaning is identical to the arrow measure, i.e. the greatest distance of the respective chord to the arc section of the circle and represents the connection between the inscribed rectangle and its circumference. It is known that, in the old Babylonian period so-called constants or working numbers, i.e. ratio values, were often used in calculations to simplify arithmetic operations. In this elaboration, it is additionally presented that, for the calculation of missing rectangle sides, a "normalized" rectangle with a base length of 1 was used, which then had to be multiplied by the real lengths in order to obtain the result. Lastly, it could be shown that, the well-known old Babylonian constants or working numbers were also used in purely geometric contexts to simplify the calculations.

List of cited cuneiform Tablets: CDLI P274707; CDLI P254557; CDLI P254451; CDLI P254835; CDLI P255048; CDLI P254790

1. Einleitung

Diese Ausarbeitung wurde erst durch die von der Universität München gepflegte DCCMT Datenbank und die Ausarbeitungen von Eleanor Robson aus dem Jahr 2014 möglich. Die dort bereitgestellten Übersetzungen werden in *Kursiv* und hier in deutscher Übersetzung wiedergegeben. Diese frei verfügbare Datenbank mit der Verknüpfung zu weiteren Seiten des Cuneiform Digital Library Initiative (CDLI) bilden die Grundlage der vorgestellten Aufgaben. Änderungen der Übersetzungen bzw. erklärende Erläuterungen wurden deshalb in Klammern ( ) hinzugefügt.

Oft wird über die bekannte Keilschrifttafel Plimpton 322 gesagt, sie sei der Beweis für die Nutzung des Satz des Pythagoras in altbabylonischer Zeit (Bruins,1949), doch hierfür müssen wir diese einzigartigen Tafel, welche sich nachweislich noch viel komplexeren Zusammenhängen bedient, nicht bemühen.

Ebenso wird es leider in der wissenschaftlichen Welt immer noch als Anachronismus aufgefasst, wenn man in der altbabylonischen Epoche eine Berechnung von geometrischen Elementen in einem Kreis benennt und zusätzlich die Verwendung von Proportionalwerten der darin eingeschriebenen Geometrie, also unsere heute so genannte trigonometrischen Funktionswerte als existierend benennt.

Es gibt jedoch zahlreiche Keilschrifttafeln und Schriftfragmente, die die Nutzung sowohl des Satz des Pythagoras, wie auch die Verwendung von komplexen Geometrien und Verhältniswerten sowie Arbeitszahlen erstellt aus Material oder Arbeitseigenschaft pro Zeit- oder Volumen-Einheit, in altbabylonischer Zeit belegen.

Hierbei wird in den Übersetzungen der DCCMT Datenbank oft auch der etwas irreführende Begriff der „Konstanten“ benutzt. Diese sind aber im Wesentlichen auf eine Grundeinheit bezogene Eigenschaften, die als Verhältniszahlen angegeben sind. Diese werden dann in weiteren Berechnungen mit dem jeweiligen realen Zahlenwert von Menge, Volumen oder auch Länge multipliziert. Auf diese Weise vereinheitlichten die babylonischen Mathematiker und Wirtschaftskalkulatoren die erforderlichen Berechnungen und vereinfachten diese durch die in der Verhältniszahl (Arbeitszahl, Konstante) vorweggenommene und somit teilweise entfallende Division.

Die Beispielhaft ausgewählten altbabylonischen Aufgaben beziehen sich auch auf mathematische bzw. geometrische Beziehungen von Kreis und eingeschriebenen rechtwinkligem Dreieck. Die Hypotenuse entspricht hierbei gleichzeitig dem Durchmesser des Kreises und bildet als Diagonale zusätzlich die Trennlinie des durch Spiegelung entstehenden Rechtecks. In dieser Kreisgeometrie erkennt man sofort den Satz des Thales, oder auch die Zerlegung des Kreisdurchmessers in 2· Pfeilwert + 1· Rechteseitenlänge.

2. Verhältniswerte, Steigungsdreiecke und andere aus dem späteren Griechenland bekannte Berechnungsmethoden

2.1 Allgemeines:

Obwohl der Winkelbegriff, als solches in altbabylonischer Zeit noch nicht ausgeprägt war, benutzte man dennoch die Begriffe Abstieg, Anstieg, Neigung oder Rücksprung um so Steigungsverhältnisse, in unserem heutigen Denken demnach entsprechende Winkel, zu beschreiben. Ausgedrückt wurde dieses aber ausschließlich durch Verhältniswerte also Proportionen von Seitenlängen zueinander.

Dass es hierzu dieses, immer wieder in Frage gestellten, Winkelbegriffes überhaupt nicht bedurfte, sehen wir selbst heute noch in unserem Alltag. So benutzen wir rund 3800 Jahre später, den mathematischen vermeintlich abstrakten Funktionswert des Tangens. Zusätzlich nutzen wir diesen Verhältniswert viel häufiger als den Wert des Sinus, der zwar heut meist zuerst genannt wird, wenn man nach einer Winkelfunktion fragt, der aber viel weniger in der Realität seine Anwendung findet.

Ob bei der Angabe eines Flussgefälles (in Prozent oder Promill), oder eines Steigungsverhältnisses von Treppen oder Rampen. Ebenso bei den Straßenschildern, die eine Steigung oder das Gefälle in Prozent angeben.

Bei allem handelt es sich um den Seitenverhältnisse oder Funktionswerte des Tangens, wie wir ihn heute nennen und als $\frac{Höhe}{Grundmaß} = \frac{Weite}{Basis} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$, ohne dass wir den Winkel „namentlich“ dabei nennen oder diesen als Nutzer gar kennen würden.

Dabei ist die Länge der Basis (AK) im Normalfall gleich 1 oder 10 bzw. dessen Potenz, als Nenner anzusehen und der Höhenwert wird nach dieser Basisentfernung entsprechend zum Zähler. Diese so normierten bzw. normalisierten Verhältniszahlen werden dann simpel neben der Basislänge 1, auch als 1:100 oder auch 1:1000 und so auch als Prozent oder Promille angegeben.

Da die babylonische Mathematik ,die 1, die 60, die 3600, die 216000 immer als Zahlenwert 1 transkribiert, wird deutlich dass auch dort beim gleichen Verhältniswert nur das „unsichtbare“ Komma verrückt wird, während der Zahlenwert des Verhältnisses gleichbleibt.

Bei alle dem war den babylonischen Rechenmeistern auch die Effizienz ihrer Berechnungen äußerst wichtig und so formten Sie Rechenwege durch die Verwendung von Reziproken so um, dass statt einer anstehenden Division mit dem Reziproken des Divisors nun einfacher multipliziert werden konnte. Wenn irgend möglich vermieden sie sogar das Quadrieren oder Wurzel ziehen, oder reduzierten diese Operationen zumindest durch die Verwendung heute unüblicher geometrischer Zusammenhänge, so dass ggf. nur simple Additionen erfolgen mussten.

2.2 Beispiele aus altbabylonischen Keilschrifttafeln

Hier sollen im Folgenden nun einige ausgewählte Beispiele von altbabylonischen Mathematikaufgaben vorgestellt werden, welche viele der zuvor genannten Prinzipien in sich tragen.

Beispiel 1:

Es handelt sich um eine, zuerst 1900 von L.W. King publizierte Tafel mit der Bezeichnung BM 085194 (CDLI No: P274707). Manchmal wird sie, wegen einer entsprechenden Aufgabe Ihres Inhalts, auch Ringwalltafel genannt. Diese Keilschrifttafel wird der altbabylonischen Zeit 1900- 1600 BC zugeordnet. Als Auffindeort weist man die Tafel, dem Ort Sippar nordnordwestlich von Babylon zu.

Neben vielen anderen Rechenbeispielen finden wir in der rechten unteren Spalte der Rückseite

(ab ri 33) folgende Aufgabe:

(Source: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus Old Babylonian/diagram word-problem/Sippar >>BM 085194)

In Anlehnung an die bisherige Übersetzung (DCCMT)
(…) = Erläuterungen dieser Arbeit
{…} = Erweiterungen der vorhandenen englischen Übersetzung

Die Aufgabe lautet:

> *Der Kreis ist 1* (hiermit ist der Umfang gemeint), *der Abstieg* (*ur-dam*) *beträgt 2 Ninda.* (2 Rohr = 12 Ellen = 360 Finger) *Wie lang ist die Sehne {die ich erreicht habe}? Verdopple 2, Du erhältst 4. Nimm die 4 von den 20* (Im Allgemeinen wird der Umfang in solchen babylonischen Rechenbeispielen als das 3 fache des Durchmessers angesehen, das heißt 60/3 = 20) *Du erhältst 16. Quadriere 20 die große Sehne.* (die Diagonale bzw. Hypotenuse = dem Durchmesser des umschreibenden Kreises dementsprechend = c^2) *Du siehst nun 6.40. Quadriere 16* (die Basis oder Ankathete dementsprechend b^2) *und erhältst 4.16. Nimm 4.16 von 6.40, du erhältst 2.24* (entsprechend c^2-b^2 = a^2, folgerichtig folgt im nächsten Schritt das Wurzel ziehen aus a^2) *Was ist quadriert 2.24? 12 Quadriert ist dies, das ist die* (gesuchte) *Sehne. Dies war die Rechnung.*

Wir erkennen hieraus, sowohl, dass ein (negatives) Steigungsverhältnis, für die Aufgabe eine entscheidende Rolle spielt, wie auch dass zur Lösung ein komplexes geometrisches Konstrukt angewandt wird. Hierbei handelt es sich um ein in einen Kreis eingeschriebenes Dreieck, welches bewusst und gemäß, dem Satz des Thales, ein Rechtwinkliges darstellt. Dies erlaubt

demzufolge die Anwendung des Satz des Pythagoras. So lässt sich die Wurzel aus der Differenz der beiden quadrierten Seiten errechnen. In seiner Verdopplung stellt dieses Dreieck dann ein Rechteck mit den Seitenlängen 16 (Höhe) und 12 (Basis) dar.

Die Diagonale = Durchmesser des Kreises = Hypotenuse des Dreiecks, bliebe aber auch bei größerem oder kleineren Abstieg immer gleich 20 Einheiten. Die Verknüpfung zwischen der zu errechnenden verkürzten Sehne und dem (vollen) Durchmesser, bildet hierbei der im Text „ur-dam“ genannte Wert für den Abstieg (= dem Pfeilmaß) mit dem Wert von 2 Rohr. Dieser bildet den Längenverlust der dahinterliegenden Sehne des Umkreis´ ab.

Wie auch auf anderen Keilschrifttafeln bereits in ähnlichem Kontext nachgewiesen, setzt sich auch hier klar erkennbar die Gesamtlänge der Diagonalen, also dem Durchmesser des Kreisen aus 2 · P + der Sehnenlänge (gleichzeitig Dreiecks- bzw. Rechteck-seite) zusammen.

(2 · 2 + 16 = 20 = 2 · 4 +12)

Wir können wie oben bereits angeführt, ebenfalls daraus ableiten, dass es weitere deutlich kleinere „Abstufungen“ des Abstiegs und somit andere Steigungsdreiecke und Verhältnisse geben konnte. Ebenso erkennen wir jedoch auch den Ansatz, dass über die Länge des Pfeilmaßes (= Abstieg) das Steigungsverhältnis der Diagonale im Verhältnis zur Basis in einem solchen Kreis angegeben wurde. In unserem Beispiel bildet der Abstieg von 2 bei einem Durchmesser von 20, ein vielfaches der bekannten Zwölferschnur (3;4;5) mit 12;16;20 ab.

Der Abstieg = Pfeil von 2 zeigt, dass in diesem Konstruktionskreis nur exakt ein gültiges Steigungsverhältnis also implizit unsere späteren Winkel, für den Pfeil 2 und die Sehne 12 existiert. Der durch die Diagonalen im Zentrum des Kreises entstehende Winkel entspricht als Zentriwinkel dem doppelten Winkel (2x 36,869 Grad) des Peripheriewinkels dieser Sehne 12. So auch Scriba/Schreiber,2015.

Nicht unerwähnt darf hier bleiben, das die Dreiecksseiten 12; 16; 20 mit dem dazugehörigen Pfeil 2, das gleiche Steigungsdreieck wie auf Plimpton 322, Zeile 11 charakterisieren. Wendet man den Streckungsfaktor von 3.45 auf alle Maße an so sehen wir Zeile 11 inklusive der bei Kleb (2021, Table 5, Zeile 11) ergänzten Spalte 0 (dort wird 2·P als Wert hinterlegt).

Kathete: 12 · 3.45= 45 ; Kathete: 16 · 3.45= 1 ; Diagonale 20 · 3.45= 1.15 ; Pfeil: 2 · 3.45= 7.30

Unabhängig von diesem Zusammenhang, sieht man ebenso bereits das geometrische Konstrukt der späteren griechischen Chordenrechnung, welche der jeweiligen Sehnenlänge dann einen eindeutige Ordnungs-Zahl, den Winkel, zuordnete.

Auch die folgende Aufgabe dieser Keilschrifttafel (ab r i 39) nutzt das gleiche geometrische Konstrukt (Rechteck mit Umkreis), ebenfalls den Satz des Pythagoras und ebenso auch den Abstieg, als Pfeilmaß 2 bei einer Sehne von 12, in diesem Kreis mit dem Umfang 1=60.

Besonders Bemerkenswert ist hierbei die Bedeutung die man dem „Abstieg“ beimisst, denn in dieser hier aus Auswahlgründen nicht im Detail widergegebenen Aufgabe, ist dieser Wert die letztendlich gesuchte Größe der Aufgabe.

Beispiel 2

Eine weitere Keilschrifttafel, ebenfalls der alt babylonischen Periode zugeordnet, fand man am Tell edh-Dhiba'i im heutigen Irak. Die Tafel, Db2-146 (CDLI No: P254557) beschreibt uns zum Beispiel in o16 bis r6, ebenso die Nutzung des Satz des Pythagoras zur Lösung.

Source: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus Old Babylonian/diagram word-problem/Tell edh Dhiba'i >> Db2-146)

In Anlehnung an die bisherige Übersetzung (DCCMT)
(…) = Erläuterungen dieser Arbeit
{…} = Erweiterungen der vorhandenen englischen Übersetzung

Die Aufgabe ab o 16 lautet:

> *Wenn die Länge 1 ist* (die Basis) *und die Weite* (Höhe= GK) *45, wie groß ist die Fläche und die Diagonale? Wenn Du fortfährst, „kombiniere“ die Länge (1) so dass das {Ergebnis 1 ist} und behalte dies im Kopf.*
> (Mit „kombiniere“ oder auch an anderer Stelle „mit dem Gegenstück“ präzisiert, ist die Senkrechte auf der Diagonalen mit gleicher Länge gemeint. Der Vorgang entspricht also exakt dem Quadrieren der Diagonale)
> *Gehe zurück, und „kombiniere“ die Weite 45, so kommt 33.45 heraus. Addiere den Wert der Länge, so entsteht 1.33.45.* (wir erkennen hier bereits $a^2+b^2 = c^2$)
> *Nimm die Quadratseite von 1.33.45 und es kommt 1.15 heraus. Deine Diagonale* (zur Basis 1 und Höhe 45) *ist 1.15* („nimm die Quadratseite von“ entspricht der Quadratwurzel von…)
> *Multipliziere die Länge mit der Weite, so dass 45 deine Fläche entsteht. Dies war die Rechnung.*

Wir finden in dieser Aufgabe ebenfalls die Zeile 11 der Keilschrifttafel Plimpton 322 wieder. Dies erscheint logisch angesichts des gleichen pythagoreischen Tripels. Auch hier wird die besondere Bedeutung der Diagonale dadurch betont, dass sie als separates Maß bestimmt wird. Die Diagonale hatte für die babylonischen Mathematiker eine geometrisch besondere Bedeutung, ließe sich doch die Rechteckfläche allein bereits mit den gegebenen Werten 1 und 45 durch simple Multiplikation ermitteln. Obwohl aus Plimpton 322 und seiner erhaltenen Spalte „I“ klar wird, dass es sich dort um einen Koeffizienten bzw. Verhältniswert

handelt, ist der Wert hier als reales quadriertes Maß der Diagonalen anzusehen. Durch die sexagesimale Schreibweise ergibt sich jedoch kein Unterschied im dargestellten Zahlenwert.

Beispiel 3

J. Lehmann nutzt in seinem Buch „4000 Jahre Mathematik in Aufgaben, Band 1“ unter Aufgabe 15 (Lehmann 1984, S.101) eine Aufgabe von einer Keilschrifttafel aus Susa ebenfalls aus der altbabylonischen Epoche 18.-17. Jhd. vor Chr. ohne jedoch die Bezeichnung der Tafel direkt zu nennen.

Die Aufgabe in Lehmanns Übersetzung (unverändert gemäß Lehmann „“) lautet:

> *„Die Breite eines Rechtecks sei $\frac{3}{4}$ der Länge, die Diagonale sei 40. Welches sind Länge und Breite? Der Text sagt: Setze 1 als Länge, 0.45 als Breite {Sexagesimalbruch}. Dann folgt die Rechnung: $\sqrt{1^2+0.45^2} = 1.15$ und die Länge wird durch $\frac{1}{1.15} \cdot 40 = 32$ angegeben.“*

Hier wird erneut der Satz des Pythagoras angewandt, doch wird hier zuerst als Grundlage ein auf die Basislänge 1 „normalisiertes“ Rechteck bzw. korrekter, dessen durch die Diagonalen entstehendes Dreieck berechnet, bevor dieses Rechteck gemäß der Vorgabe mit dem Streckungsfaktor also der Reallänge der Diagonalen multipliziert wird.

Hier wird dementsprechend ebenfalls mit sogenannten Konstanten ($\frac{3}{4}$) gerechnet, die in Bezug auf eine Grundeinheit = 1, hier die Basislänge des Dreiecks, zu verstehen sind.

In einem solchen Dreieck der Basislänge 1 ist die „Öffnungsweite“ also die Länge der 2. Kathete gleichzeitig immer der Verhältniswert von $\frac{Weite}{Basis} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$. Man sieht deutlich die im Punkt 2.1 bereits dargelegte Nutzung dieser Verhältniswerte bis in die heutige Zeit.

Dass solche „Konstanten“ auch in der altbabylonischen Geometrie nichts Ungewöhnliches sind, zeigt uns nicht nur das hier ebenso behandelte Keilschrifttafel YBC 7289 mit seinem angegebenen Diagonalen Verhältnis eines Quadrats sehr eindrücklich.

Aus dem gleichen Umfeld (Susa) und Epoche (altbabylonisch) stammt auch eine Sammlung von Konstanten auf der Keilschrifttafel TMS 025(TMS 03); CDLI P254835.

(Source: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus >>Reference>> Susa >> TMS 025 und Bruins 1961 ,S24)

In Zeile o31 finden wir die Konstante des Quadrats mit der Angabe *1.25*.

Selbstverständlich ist dies eine deutlich gröbere Näherung als die auf YBC 7289 angegebene, jedoch ließ sich mit dieser Sexagesimalen Zahl, sicherlich je nach Einsatzzweck, deutlich einfacher rechnen. Dass es sich hier ohne Zweifel um den gleichen zur Basislänge 1 „normalisierten“ Diagonalenwert wie auf YBC 7289 handeln soll, ist jedoch ersichtlich.

Das solche unterschiedlichen Näherungen und deren Verwendung während der gleichen Zeitepoche parallel genutzt wurden, ist auch im nachfolgenden Beispiel 4 deutlich zu sehen

In Zeile o32 (TMS 025(TMS 03)) finden wir dementsprechend auch die Konstante der Diagonalen des Rechtecks!
Diese Verallgemeinerung eines Rechtecks mit den sexagesimalen Seitenlängen 1 und 45 bzw. auch 1 und 1.20 etc. entsprechend dem dezimalen Seitenverhältnissen $\frac{4}{3}$ bzw. $\frac{3}{4}$ zeigt uns deutlich die schon damals herausragende Bedeutung des später als „Pythagoreisch" benannten Dreiecks mit den Seitenlängen 3 und 4, sowie 5 als Diagonale.
Als Konstante finden wir dementsprechend die Länge der Diagonalen 1.15 wie in Lehmanns Aufgabe 15 und der darin zitierten Keilschrifttafel.

Beispiel 4

Ein weiteres Beispiel und eine ähnliche Rechenabfolge finden wir in BM 096957 + (CDLI P254451) in r i 19

Source: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus Old Babylonian/diagram word-problem/Sippar >>BM 096957+)

In Anlehnung an die bisherige Übersetzung (DCCMT)
(…) = Erläuterungen dieser Arbeit
{…} = Erweiterungen der vorhandenen englischen Übersetzung

Die Aufgabe ab r i 19 lautet:

> *Ein Tor, die Höhe ist ein halbes Rohr und 2 Cubits* (= 8 Cubits), *die Breite beträgt 2 Cubits. Wie ist seine Diagonale? Quadriere* (ein Sechstel) *0.10* (Die Breite ist 2 Cubits = 1/6 Rohr*), du findest 1.40 für den Boden* (Basis oder auch oben Breite genannt). *Nimm das Reziproke von 0.40* (2/3 Rohr = 8 Cubit, siehe die 1. Zeile) *und multipliziere dies mit 1.40, du erhältst 2.30. Teile 2.30 durch 2, das sind 1.15. Addiere 1.15 zu 40* (der Höhe) *und du erhältst 41.15. Das ist die Rechnung.*

Es wird uns also bewusst, statt der exakten Lösung durch den Satz des Pythagoras (Diagonale = √ Basis²+ Weite²) eine übliche Näherung präsentiert, die als Ergebnis genauer ist, als eine weitere ebenfalls auf dieser Tafel benannte. Die hier zuerst Diskutierte, entspricht der babylonischen Näherung: Diag. ~ a + b² / 2a (Lehmann, J 1994; 101, Aufgabe 16). Wo diese von Lehmann vorgestellte Näherung in Keilschriftaufgaben vorkommt, ist jedoch in dieser Quelle leider nicht angegeben und so kann man auch nur vermuten, dass Lehmann genau diese Aufgabe hier vor Augen hatte und die Rechenprozedur in seiner Formel inhaltlich gleich, aber dennoch anders zusammenführte.
In dieser Aufgabe wird dem Text gemäß folgendermaßen gerechnet:

Diag. ~ Torhöhe + $\left(\frac{Basis^2}{Höhe}\right)$ /2

Durch die Multiplikation mit dem Reziproken wird hierbei wie bei babylonischen Rechnungen üblich eine komplexere Division in der Klammer umgangen.

Während das korrekte Ergebnis eine Wert mit vielen Sexagesimalen Stellen produzieren würde, gelangt die Näherung mit 41.15 auf 0,46 Promille an den originalen Wert (41.13.51.48...) heran. Dies gilt jedoch nur bei größeren Differenzen zwischen den beiden Seiten des Rechtecks, wie dies bei einem Tor (meist 1:3 oder 1:4 üblich ist)

Die folgende Aufgabe dieser Tafel ab r i 25, führt die gleiche Rechnung rückwärts durch und wird deshalb nicht weiter erläutert. Sie benutzt jedoch die gleiche Näherungsformel.

Beispiel 5

Interessanterweise folgt auf der gleichen Keilschrifttafel dann eine Aufgabe in den Zeilen ab r ii 1, welche sich einer vermutlich älteren gröberen Näherung bedient, ob dies nur zum Vergleich, oder aus „althergebrachter“ Rechnung erfolgte, kann jedoch nicht gesagt werden.

Source: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus Old Babylonian/diagram word-problem/Sippar >>BM 096957+)

In Anlehnung an die bisherige Übersetzung (DCCMT)
(…) = Erläuterungen dieser Arbeit
{…} = Erweiterungen der vorhandenen englischen Übersetzung

Die Aufgabe ab r ii 1 lautet:

Sein Aussehen ist so. Die Breite ist 2 Cubits, die Höhe 40 {Rohr = 8 Cubits bzw.Ellen}, was ist die Diagonale?
Quadriere 10 (1/6 Rohr) die Breite. Du erhältst 1.40, von der Basis. Multipliziere 1.40 mit 40 {2/3 Rohr = 8 Cubits} der Höhe und du findest 1.6.40. Verdopple es, du siehst nun 2.13.20. Addiere es zu 40 {2/3 Rohr = 8 Cubits} der Höhe. Du erhältst 42.13.20, die Diagonale. Das war die Rechnung.

Wie man erkennen kann, nutzt der Verfasser der Keilschrifttafel hier eine andere Näherung (3.), welche noch grober als die bereits zuvor genannte Näherung nach Lehmann (1984 S.101) (Diag. ~ Höhe + $\frac{Basis^2}{2x\ Höhe}$) ist (2.) .

Hier eine Gegenüberstellung:

(1.) $a^2+b^2 = c^2$ $40^2 + 10^2 = 26.40 + 1.40 = 28.20$; $\sqrt{28.20}$ ~ 41.13.51.48...

(2.) Diag. ~ Höhe + $\left(\frac{Basis^2}{Höhe}\right)$ /2 40 + (1.40 / 40) /2 = 40 + 2.30 /2 = 41.15

(3.) Diag. ~ Höhe + $Basis^2$ x Höhe x2 40 + 1.40 x 40 x 2 = 40 + 2.13.20 = 42.13.20

Während bei der 1. Gleichung immer der korrekte Wert heraus kommt, liegt dies doch bei der Näherung anders, hier hängt die Genauigkeit des Ergebnisses vom Steigungsverhältnis der Diagonalen , also dem Verhältnis der beiden Katheten zueinander ab.

Die Aufgaben in r ii 11 und r ii 15 sind stark zerstört, zeigen jedoch in Ihrer Rekonstruktion direkt den Satz des Pythagoras. Weshalb hierbei durch das DCCMT die Diagonale mit 41.13.20 rekonstruiert wurde ist nicht nachvollziehbar und vermutlich nur eine Verschreibung, da dies weder eine direkte Näherung der Diagonalen aus (1.) noch eine aus den zuvor genutzten Näherungen (2.) oder (3.) ist.

Völlig unabhängig davon erkennen wir hieraus, dass die babylonischen Mathematiker mit allen 3 Varianten, vermutlich wie heut je nach Genauigkeitsanspruch rechnen konnten und diese Variationen in der gleichen Zeitepoche kannten und nutzten.

Auch spätere Keilschriftfragmente zum Beispiel der Achämenidenzeit, beinhalten ebenso selbstverständlich den Satz des Pythagoras, so zum Beispiel VAT07848 (CDLI P254936) o5-o6.

Beispiel 6:

Es handelt sich hier erneut um die zuerst 1900 publizierte Ringwall-Tafel mit der Bezeichnung BM 085194 (CDLI No: P274707).

Auf der Vorderseite dieser Keilschrifttafel wird folgende namensgebende Aufgabe diskutiert (Ringwall). Diese benutzt zwar nicht direkt den Satz des Pythagoras, dennoch arbeitet sie mit Steigungsverhältnissen für einen Wall und einen Graben, sowie mit festen extern bereits bestimmten Verhältniswerten als Arbeitszahlen bezogen auf eine Grundeinheit, die dann mit den realen Längen oder Volumina multipliziert werden mussten. Eine Parallele zum angegebenen Verhältniswert auf YBC 7289 der Diagonalen in einem auf Basis 1 „normalisierten“ Quadrat und dessen Umkreis sowie dessen dann notwendige Multiplikation mit der Seitenlänge 30 ist für solche oft genutzten Konstanten / Verhältniswerte evident.

(Source: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus Old Babylonian/diagram word-problem/Sippar >>BM 085194)

Ab o i 37 finden wir:

> *Eine Stadt bauen. Der Umkreis den ich zog war von 1* (60 Rohr im Umfang). *Ich schritt 5 auf jeder Seite ab und dann baute ich* (in diesem Abstand) *einen Wassergraben. Die Tiefe war 6. Ich nahm ein Volumen von 1.7.30 weg. Ich schritt wieder 5 auf jeder Seite ab, das sind so 10. Darauf habe ich einen Wall gebaut. Dieser Wall/Mauer neigt (besser verständlich wäre hier statt „neigt“ >>> „breitet sich aus“) sich auf einer Elle Höhe um 1* aus. (1 muss hier offenbar als 10er Haken gelesen werden, oder alternative Lesung

siehe weitere Rechnung unten). *Was sind die Basis, die Oberseite und die Höhe? Und was ist der Kreis des Walls?*
Sie: Da der Kreis sechzig ist, was ist sein Durchmesser? Nehmen Sie den dritten Teil von sechzig, dem Kreis(umfang). *Sie sehen 20. Der Durchmesser ist 20. Verdopple 5, die Grenze. Sie sehen 10. Addieren Sie 10 zu 20, dem Durchmesser. Sie sehen 30. Verdreifachen Sie den Durchmesser* (Durchmesser x 3 = Umfang). *Sie sehen 1.30. Der Kreisumfang des Grabens* (also auch seine Länge) *ist 1.30.*
Kehren wir zurück. Quadriere 1.30 (den Umfang*). Sie sehen 2.15. Multiplizieren Sie 2.15 mit 5 {die Konstante des Kreises}*

(Zum Verständnis: 5 ist das reziproke von 12. Üblicherweise wurde die Kreisfläche in babylonischer Zeit aus U^2 / 12 errechnet. Man errechnete also in diesem Schritt die innenliegende Kreisfläche. Dies legt wiederum nahe, dass man davon ausging, dass ein umlaufender Graben eine Fläche an Oberkante Gelände in der gleichen Größe des von ihm eingeschlossenen Gebietes haben sollte. Denn die Aufgabe führt fort:)

Sie sehen 11.15, das Gebiet (die Fläche). *Multiplizieren Sie 11.15 mit 6, die Tiefe. Sie sehen 1.7.30, das Volumen. Lösen Sie den Kehrwert von 10, der Arbeitsrate. Sie sehen 6.*

Multiplizieren Sie 6 mit 1.7.30, dem Volumen. Sie werden 6.45 sehen. Die Stärke (benötigte Gruppengröße) *der Arbeiter ist 6.45. Lösen Sie den Kehrwert von 6.45 auf. Sie sehen 8.53.20. Multiplizieren Sie 8.53.20 mit 1.30, dem Kreisgraben* (dessen Länge). *Sie sehen 13.20,* (die auszugrabende Länge bzw. dessen Volumen für 1 Mann) *im Graben.*

Kehren wir zurück (Hier könnte in der Übersetzung auch „noch einmal anders, zur Kontrolle“ stehen.) *Siehe 10 die Arbeitsrate* (für einen entsprechenden 6 Einheiten tiefen Graben). *Löse das Reziproke von 1.30, den Kreis. Sie sehen 40. Multiplizieren Sie 40 mit 13.20.* (Aushublänge für einen Arbeiter dividiert durch die Länge/ Umfang des Grabens = Arbeitseinheit pro Volumen) *Sie sehen 8.53.20.* (Achtung Zahlendreher in der DCCMT Übersetzung) *Multiplizieren Sie 8.53.20 mit 1.7.30, dem* (Aushub-)*Volumen. Sie sehen 10, die Arbeitsrate.* (Dieser Absatz ist nur eine nochmals erklärende Rechnung mit vertauschten Werten bzw. Kontrollrechnung/Erklärung die am Ende zum Ausgangspunkt mit gleichem Ergebnis zum Ende des vorletzten Absatzes zurückführt.)

Zurück. Betrachten wir den Wall. Verdoppeln Sie 5, die Neigung. Sie sehen 10. Verdoppeln sie die 10 (diese Verdopplungen werden ohne detaillierte Erklärung vorgenommen).
Sie sehen nun 20. (statt mit Division durch 3 wird wie üblich mit dem Reziproken multipliziert)
Multiplizieren Sie 0.20 mit 1.7.30 (Aushubvolumen). *Sie sehen 22.30. Was soll ich zu 22.30 hinzufügen, damit es einen «Rest» <Quadrat-Seite> und das, was hinzugefügt wird, eine Quadrat-Seite befriedigt? Addiere 5.03.45. Sie sehen 27.33.45. Die Quadrat Seite der Basis ist 5.15. Was ist die Quadratseite von 5.3.45? Die Seite dieses Quadrats* (Quadratwurzel) *ist 2.15, die Oberseite* (Mauerkrone).

Löse den Kehrwert von 2 (Durchmesser der Stadt 20+2x5 Graben +2x5 Wall = 40 x3 = 2), *dem Kreisumfang des Walles. Sie sehen 30. {Multiplizieren sie} 30 mit 1.7.30* (Aushubvolumen des kleineren Umfangs des Grabens). *Sie sehen 33.45.* (hier ist also pro Länge weniger Material zur Verfügung.)
Wieder zurück. Summiere die Basis und die Spitze (Oberseite des Walls). *Sie sehen 7.30, halbieren sie 7.30.* (hier wird in üblicher Weise aus dem Trapezprofil des Walls, ein Rechteck gemacht, dieses halbiert und so die gesamte Flächenformel nach der Höhe umgestellt.) *Sie sehen 3.45. Löse den Kehrwert von 3.45. Sie sehen 16.*
Kombiniere (Multipliziere) *16 mit 33.45. Sie werden 9 sehen. Die Höhe des Walles beträgt 9. Das ist die Vorgehensweise.*

Der letzte Abschnitt der Aufgabe beschreibt klar und fehlerfrei wie man aus der Fläche des im Querschnitt trapezförmigen Walles die Höhe extrahiert (Fläche = (a+b) /2 x Höhe bzw. Höhe = Fläche/ (a+b)/2) Zuvor wird ebenso korrekt die neue Querschnittsfläche auf den größeren Kreisumfang des Wallkreises angepasst.

Insgesamt müssen wir dieses Beispiel als Theorie auffassen und es handelt sich wie bei anderen Aufgaben um einen Belagerungswall, anstelle eines Schutzwalles mit jeweils vorgelagerten Graben. Denn im letzteren Fall wäre der Graben logisch außen anzuordnen.

Trotz alledem, scheint es sich hier um das Standardmodell eines 6 Einheiten tiefen Grabens zu handeln, da dieser hier entsprechend dem gegebenen Aushub eine Querschnittsfläche von 45 Quadrateinheiten hatte und es für einen solchen Graben Arbeitskennwerte, also Konstanten bzw. feste Verhältniswerte gab. Diese Querschnittsfläche ergibt sich bei einem senkrechten also rechteckigen Graben mit 7,5 Einheiten Breite und den 6 Einheiten Tiefe. Wie auch in der Rechnung berechnet. Dieser ist und war bautechnisch aber real kaum realisierbar. Wir können deshalb davon ausgehen, dass bei einem ebenso wie bei der Mauer/dem Wall geneigten Graben, eine Grabenbreite von 8,5 Einheiten und eine Sohlbreite von 6,5 Einheiten vorgesehen war. Dies entspricht 1er Elle auf die Grabentiefe pro Seite. Wie man aus dem Kontext der Aufgabe jedoch bemerkt, würde sowohl der rechteckige (7,5x6) wie auch dieser steile Graben in den außenliegenden Mauer/Wall – fuß hineinreichen.
Daraus wird auch in der Kalkulation deutlich, dass es sich rein um eine Beispielaufgabe handelt, die die Prinzipien der Berechnung verdeutlichen sollte.
Uns zeigt sie jedoch ebenso eindrücklich die Vermeidung der Division durch die Nutzung der reziproken Zahlenwerte und den Einsatz von festen Verhältniswerten bzw. Einheitswerten für den Kreis und die Aushubleistung eines Arbeiters pro Zeiteinheit.

Die durch den größeren Kreisumfang reduzierte Querschnittsfläche des in diesem Fall außen liegenden Walles entspricht mit 33.45 Einheiten, im Gegensatz zum Querschnitt des Grabens von 45 Einheiten.
Das Verhältnis (4/3 oder 1.20) ergibt sich zwangsläufig durch die in der Aufgabe gegebene Vergrößerung des Kreisdurchmessers um beidseits 5 Einheiten.
In Ergänzung / Anpassung, der Übersetzung ergeben sich die errechneten Werte 5.15 für die Basis, 2.15 obere Mauerbreite und einer Höhe 9, nur bei einer nahezu senkrechten Mauer und einem Steigungsverhältnis/Aufweitung die 1/6 Ellen (sexagesimal 10) pro Höhenelle und

Mauerseite. Demzufolge kann nur bei der alternativen Interpretation des Textes in Zeile o i 43 als „1 Elle für die gesamte Höhe des Grabens“ von 6 Ellen Tiefe bzw. der oben in der Aufgabe genannten Lesung von sexagesimal 10 statt der 1, ergibt sich rechnerisch der korrekte und auch durch die Rechnungsabfolge bestätigte Neigungswert auch für die Mauer/ den Wall.

Beispiel 7:

Dieses Beispiel behandelt die sehr bekannte Keilschrifttafel YBC 7289. Da schon vieles von verehrten Mitforschenden (Friberg,2010; Fowler/Robson,1998 ; Kwan,2019) vor allem zur Näherung von $\sqrt{2}$ geschrieben wurde, soll hier zur Vorderseite nur noch Folgendes geschlussfolgert werden.

Da es sich mit hoher Wahrscheinlichkeit um eine zu lösende Aufgabe im altbabylonischen Stil handelt, stellt sich die Frage welcher Wert initial der Gegebene war!

Anhand des Schriftbildes erscheint sowohl 1.24.51.10, wie auch die Seitenlänge 30, von der angegebenen Diagonalenlänge 42.25.35 verschieden.

Da eine einfache Multiplikation der zwei erst genannten Werte als Aufgabe nicht plausibel erscheint, ist es eher logisch anzunehmen, dass anfänglich nur die 42.25.35 als Wert gegeben war. Anhand der Darstellung mit den beiden offensichtlich gleich langen Diagonalen ergab sich für die Lösung, ein Quadrat mit Seitenproportion 1, also mit der Basislänge 1 und der Weite bzw. Höhe von 1.

Es liegt also nahe, hier ein Pendant der Aufgabenstellung aus Beispiel 3 zu vermuten.

Der Bearbeiter der Aufgabe hatte also zunächst, die Näherung bzw. Konstante für die Diagonale eines „normalisierten“ Quadrats zu finden bzw. mit dem „Satz des Pythagoras“ zu berechnen. Statt des auf TMS 025 genannten Wertes von 1.25, verwendete dieser Bearbeiter nun die äußerst genaue Näherung des Wertes für $\sqrt{2}$ mit 1.24.51.10. Nun wurde die Reallänge der Diagonalen d = 42.25.35 mit dem Diagonalenwert eines Quadrats mit Basis 1 multipliziert. Durch die gleich langen Quadratseiten musste abschließen nur dieser Wert durch 2 geteilt oder wie üblich mit 30 multipliziert werden.

Da das Rechteck mit seinem Seitenverhältnis 1:1 und der Diagonalen $\sqrt{2}$ eindeutig beschrieben ist, musste nun nicht mehr mit Rechenoperationen wie Quadrieren oder Wurzel ziehen gearbeitet werden. Der in allen drei Dreiecksseiten (Basis und Höhe, sowie Diagonale des Quadrats) enthaltene Streckungsfaktor ergibt sich nach kurzer Rechnung und ist damit auch unsere gesuchte Quadratseite 30, für die anfänglich angegeben Diagonale von 42.25.35.

$2 \cdot 1 \cdot a = \sqrt{2} \cdot (a \cdot d)$ >>> $\frac{d \cdot (a \cdot d)}{2} = 1 \cdot a = \frac{1.24.51.10 \cdot 42.25.35}{2} = 1 \cdot 30$ (a= Quadratseite, d=Diagonale)

Ob die hier beschriebene Aufgabe damals so gestellt wurde, wird natürlich nie letztendlich bewiesen werden können, doch wäre die Vermeidung komplizierterer Rechenoperationen eine sehr typisch altbabylonische Vorgehensweise. Ebenso war die Anwendung von Konstanten, oder besser gesagt festen Verhältniswerten für bestimmte geometrische Charakteristika üblich. Letztlich liefert auch das hier angeführte sehr ähnliche Beispiel 3 ein weiteres Indiz für diese These.

Die Aufgabe auf der Rückseite lässt sich in Anlehnung an dieses Beispiel 3 und unter Berücksichtigung aller lesbaren Zahlenwerte in folgender Weise auflösen und bildet so auch eine inhaltliche Verknüpfung zur Vorderseite:

Source: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus Old Babylonian/diagram/unknown >> YBC 7289 , ohne Text)

Gegeben:

Das Verhältnis der Seiten 1.20 dementsprechend $\frac{4}{3}$ *(Position: oben links)*
Die Dreiecksfläche 10 entsprechend 600 (Position: im unteren Dreieck links) >>>>>
Gesamtfläche des Rechtecks = 1200

Gesucht:
A: Die Seitenlänge die bei dem gegebenen Verhältnis die angegebene Dreiecksfläche ergibt.
B: Die Diagonale und der Umfang des Umkreises.

Das Seitenverhältnis wurde vermutlich auch hier zuerst auf eine normalisiertes System mit Basis 1 und Höhe 45 angewandt. : $\sqrt{1^2+0.45^2} = 1.15$ *Entsprechend der Fläche des Rechtecks von* $2 \cdot 10$ *Die Basis b = 4/3 der Höhe a dementsprechend ist die Fläche*

$A = (a \cdot 4/3) \cdot a$, *umgestellt nach der Höhe a: ist* $a = \sqrt{A \cdot \frac{3}{4}} = 30$ *, demzufolge ist b= 40.*

Die Diagonale kann durch den Funktionswert der Diagonalen $1.15 \cdot 40 = 50$ *errechnet werden. Ebenfalls wäre ebenso* $\sqrt{40^2+30^2} = 50$ *als Lösungsweg möglich. Durch Multiplikation mit der Kreiskonstanten zwischen Diagonale und Umfang ergibt sich* $3 \cdot 50 = 2.30$.

Es scheint, als wäre auch diese Aufgabe vollständig gelöst worden zu sein, denn sowohl die oben auf der horizontalen Rechteckseite stehende „40“ wie die unten stehende „II“, ergänzt um nur noch zu erahnende 3 Zehnerhaken zu 2.30 entsprechend 150 als Umfang sind noch teilweise vorhanden.

Der zuvor gefundene Durchmesser 50 wurde hierbei und wie üblich durch eine Multiplikation mit der altbabylonischen Konstante 3 zum Umfang des Umkreises umgerechnet. Auch aus diesem Grund und als „Zwischenergebnis“ war es als Maß auch nicht wichtig, diesen separat festzuhalten. Siehe hierzu unter weiteren anderen Quellen

beispielhaft TMS 025, Zeile o3 „ *Die Konstante des Kreises (von 1) für dessen Diagonale ist 20*“ Das Reziproke von sexagesimal 20 ist 3.

Die im altbabylonischen identische Bezeichnung der Diagonalen mit dem Durchmesser, indiziert eine weitgehende Verknüpfung zwischen eingeschriebenem Rechteck und seinem Umkreis.

Auf der Keilschrifttafel haben wir also auf Vorder- und Rück-seite ein, in einen Kreis eingeschriebenes Rechteck (Vorderseite Spezialfall Quadrat) vor uns, zu dem jeweils eine Aufgabe gestellt wurde.

3. Zusammenfassung

Entsprechend den Aufbereiteten, den hier zusätzlich Aufgeführten gleichartigen und weiteren Aufgaben, sollte die bisherige Haltung der Wissenschaftsgemeinschaft überdacht werden. Es wird deutlich, dass auf zahlreichen altbabylonischen Keilschrifttafeln und für alltägliche mathematische Anwendungen, Berechnungsmethoden angewendet wurden, für die wir heute mehrere griechische Mathematiker und deren Theoreme als Erklärung benennen müssen. Und dies obwohl jene Formeln und Gesetzmäßigkeiten, erst rund 1300 Jahre den hier auszugsweise präsentierten Keilschrifttafeln in die griechische Mathematik und Geometrie eingingen. Es ist sicher unstrittig, dass die griechischen Mathematiker, aus zahlreichen auch sehr alten Quellen, ihr Wissen schöpften. Innerhalb dieser Arbeit konnte dargelegt werden, dass der Satz des Thales als Grundlage der Geometrie im Kreis allseits bekannt und sehr selbstverständlich bei der Anwendung und Berechnung der darin eingeschriebenen Rechtecke / Dreiecke angewandt wurde. Ebenso sind zahlreiche Anwendungen des Satz des Pythagoras nachweisbar. Durch die Nutzung der Geometrie im und mit Nutzung des Um-Kreises, wird deutlich das hier Verhältniswerte für Seitenlängen eingesetzt werden, die in den Aufgaben die Berechnung erleichtern soll. Die Nutzung des Pfeilmaßes, des als Abstieg /Rücksprung bezeichneten Wertes für Neigungsverhältnisse von Dämmen und Gräben sind markant. Gemeinsam mit den zahlreichen geometrischen Konstanten aus altbabylonischer Zeit zeichnen sie alle ein Bild dieser herausragenden Gesellschaft und deren Wissenschaft, die sich logisch als notwendige Basis und Vorstufe der griechischen Mathematik und Geometrie in die Zeitgeschichte einfügt.

Jens Kleb, Germany Dec.2022, Email: j.kleb@keration.de

4. Bibliografie:

Bruins E. M. 1949. Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Proceedings 52, 191.

E. Bruins, M. Rutten,1961, Textes mathématiques de Susa: mémoirs de la mission archéologique en Iran, Tome 34 S.26 Libraire Orientaliste Paul Geuthner, Paris.

Friberg, J., ed. 2007. A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts. Manuscripts in the Schøyen Collection Cuneiform Texts I. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York, NY: Springer Science+Business Media LLC.

Fowler, David; Robson, Eleanor (1998), „Quadratwurzel-Approximationen in der alten babylonischen Mathematik: YBC 7289 im Kontext", Historia Mathematica, 25 (4): 366–378, doi:10.1006 / hmat.1998.2209.

Kwan, Alistair (2019), Mesopotamische Tablette YBC 7289, Universität Auckland, doi:10.17608 / k6.auckland.6114425.v1.

Kleb, Jens (2021), On the evidence of a trigonometric function value system in Babylon , ArXiv Cornell, doi: https://arxiv.org/abs/2112.13379.

Lehmann, J. (1984), 4000 Jahre Mathematik in Aufgaben - So rechneten Ägypter und Babylonier, Urania, Leipzig.

Neugebauer, O. ; Sachs, A. (1945), Mathematische Keilschrifttexte, American Oriental Series, American Oriental Society und die American Schools of Oriental Research, New Haven, Conneticut.

Robson, Eleanor (2014), The Digital Corpus of Cuneiform Mathematical Texts, Universität München URL: http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/ .

Robson, Eleanor (2007), „Mesopotamian Mathematics", in Katz, Victor J. (Hrsg.), Die Mathematik Ägyptens, Mesopotamiens, Chinas, Indiens und des Islam: Ein Quellenbuch, Princeton University Press.

Scriba, C.J., and P. Schreiber. 2015. 5000 Years of Geometry. Mathematics in History and Culture. 2015th ed. Basel: Birkhäuser Verlag GmbH.